数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 97-105

Parallel hybrid methods for relatively nonexpansive mappings

千葉大学・社会科学研究院 青山耕治
Koji Aoyama
Graduate School of Social Sciences,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10.

Keywords and phrases. Parallel hybrid 法, parallel shrinking 法, relatively nonexpansive 写像, 不動点.

概要

文献 [4] の解説を行う。

1 はじめに

本稿では, ある種の非拡大性をもつ写像の族の共通不動点近似に関する結果を紹介する。

本稿の構成は次の通りである。次節では, 以降の節で必要となる定義, 記号および既知の定理を述べる。第 3 節では, 文献 [2] で導入された不動点近似法に注目する。この近似法は, 文献 [17] や [16] における射影に基づく近似法と, ある種の並列計算を融合したもので, parallel hybrid 法と呼ばれる。まず, 写像列に関する収束定理 (定理 3.2) を述べ, それを使って文献 [2] の主結果の一つ [2, Theorem 3.1] が一般化できることを説明する。第 4 節では, 前節で取り上げた parallel hybrid 法の並列計算部分と, [20] で導入された不動点近似法 (shrinking 法) を融合させた parallel shrinking 法についての結果 (定理 4.2 など) を紹介する。最後の第 5 節では, 定理 3.2 を使って, [2, Theorem 4.1] に関連する結果 (定理 5.1) を示す。

2 準備

本稿では, E を実 Banach 空間, $\|\cdot\|$ を E またはその共役空間 E^* のノルム, $\langle x, x^*\rangle$ を $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合とする。また, E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に強収束することを $x_n \to x$, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す。E の双対写像 (duality mapping) を J で表す。つまり, J は E から E^* への集合値写像で, $x \in E$ のとき, $Jx = \left\{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$ である。

S_E を E の単位球面, つまり, $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする。E のノルム $\|\cdot\|$ が Gâteaux 微分可能であるとは, すべての $x, y \in S_E$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

が存在するときをいう。このとき, E は滑らか (smooth) であるという。E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるとは, (2.1) が $x, y \in S$ に関して一様に収束するときをいう。このとき, E は一様に滑らか (uniformly smooth) であるという。E が滑らかなとき, 双対写像 J は 1 価であることが知られている。また, E が一様に滑らかなとき, J は E の有界集合上で一様連続であることが知られている。詳しくは, [19] を参照するとよい。

再び, S_E を E の単位球面とする。Banach 空間 E が狭義凸 (strictly convex) であるとは, $x, y \in S_E$, $x \neq y$ ならば $\|x + y\| < 2$ が成り立つときをいう。E が一様凸 (uniformly convex) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $x, y \in S_E$, $\|x - y\| \geq \epsilon$ ならば $\|x + y\|/2 \leq 1 - \delta$ が成り立つときをいう。E が一様凸ならば, E が回帰的で狭義凸であることが知られている. また, E が滑らか, 狭義凸, 回帰的ならば, 双対写像 J は全単射で, J^{-1} は E^* の双対写像であることが知られている。詳しくは, [19] を参照するとよい。

E を滑らかな Banach 空間とする。このとき, 関数 ϕ: $E \times E \to \mathbb{R}$ を, $x, y \in E$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$$

で定義する [1]。

E を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間, C を空ではない E の閉凸部分集合とする。このとき, 各 $x \in E$ に対して, $\phi(x_0, x) = \min\{\phi(y, x) : y \in C\}$ となる点 $x_0 \in C$ がただ一つ存在することが知られている。そのような点 x_0 を $\Pi_C(x)$ と表し, Π_C を E から C の上への一般化射影 (generalized projection) という [1, 14]。

E を滑らかな Banach 空間, C を空でない E の部分集合, T を C から E への写像とする。T の不動点の集合を $\mathrm{F}(T)$ で表す。$p \in C$ が T の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは, $x_n \rightharpoonup p$ かつ $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ となる C の点列 $\{x_n\}$ が存在するときをいう [13, 18]。T の漸近的不動点の集合を $\hat{\mathrm{F}}(T)$ で表す。写像 T が ϕ に関して擬非拡大 (quasinonexpansive) である [11] とは, $\mathrm{F}(T) \neq \emptyset$, かつ, 任意の $x \in C$ と $p \in \mathrm{F}(T)$ に対して $\phi(p, Tx) \leq \phi(p, x)$ が成り立つときをいう ([3, 6–9] では, これを "(r) 型" と呼んでいる)。T が *relatively nonexpansive* であるとは, T が ϕ に関して擬非拡大であり, $\mathrm{F}(T) = \hat{\mathrm{F}}(T)$ が成り立つときをいう [12, 15, 16]。E が滑らかで狭義凸, C が空でない E

の閉凸部分集合のとき, ϕ に関して擬非拡大な写像 $T\colon C \to E$ の不動点集合 $\mathrm{F}(T)$ は閉凸であることが知られている [16, Proposition 2.4]。

C を Banach 空間 E の空でない部分集合とし, $\{T_n\}$ を C から E への写像の列, F を $\{T_n\}$ の共通不動点の集合, つまり, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{F}(T_n)$ とし, F は空ではないと仮定する。このとき, $\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $\{x_n\}$ が $\|T_n x_n - x_n\| \to 0$ となる C の有界点列ならば, $\{x_n\}$ のすべての弱収積点が F に属するときをいう [3, 5, 6, 8, 9]。

次節で紹介する主結果の証明において, 以下の補助定理および定理が重要な役割を果たす。

補助定理 2.1. ([4, Lemma 2.2]) E を Banach 空間, C を空でない E の部分集合, N を正の整数, $\Lambda = \{i \in \mathbb{N}\colon 1 \le i \le N\}$, U を C から E への写像, $\{S_i\colon i \in \Lambda\}$ を C から E への写像列とし, $\bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{F}(S_i)$ は空ではなく, 任意の $x \in C$ に対して $Ux = S_k x$ となる $k \in \arg\max\{\|S_i x - x\| : i \in \Lambda\}$ が存在すると仮定する。このとき, 以下が成り立つ。(a) 任意の $x \in C$ と $i \in \Lambda$ に対して $\|S_i x - x\| \le \|Ux - x\|$; (b) $\mathrm{F}(U) = \bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{F}(S_i)$; (c) 各 S_i が ϕ に関して擬非拡大ならば, U も ϕ に関して擬非拡大である。

補助定理 2.2 ([4, Lemma 2.3])**.** E を滑らかな Banach 空間, C を空でない E の部分集合, $\{U_n\}$ を C から E への写像列, N を正の整数, $\Lambda = \{i \in \mathbb{N}\colon 1 \le i \le N\}$, $\{S_{i,n}\}$ を $i \in \Lambda$ と $n \in \mathbb{N}$ を添字とする C から E への写像列とする。さらに, $\bigcap\{\mathrm{F}(S_{i,n})\colon (i,n) \in \Lambda \times \mathbb{N}\}$ は空ではなく, 任意の $x \in C$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $U_n x = S_{k,n} x$ となる $k \in \arg\max\{\|S_{i,n} x - x\| : i \in \Lambda\}$ が存在すると仮定する。もし, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\{S_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が条件 (Z) を満たすならば, $\{U_n\}$ も条件 (Z) を満たす。

補助定理 2.3 ([4, Lemma 2.4])**.** E を一様凸かつ一様に滑らかな Banach 空間, C を空でない E の部分集合, $T\colon C \to E$ を ϕ に関して擬非拡大な写像, $\{\lambda_n\}$ を $[0, 1)$ の数列とし, 写像 $S_n\colon C \to E$ を $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n = J^{-1}[\lambda_n J + (1 - \lambda_n) JT]$$

で定義する。このとき, 各 S_n は ϕ に関して擬非拡大であり, さらに, T が relatively nonexpansive, かつ, $\sup_n \lambda_n < 1$ ならば, $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たす。

定理 2.4 ([4, Theorem 2.5])**.** E を一様凸かつ滑らかな Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合, $\{U_n\}$ を C から E への写像列, F を $\{U_n\}$ の共通不動点の集合とし, 各 U_n は ϕ に関して擬非拡大であり, F は空ではなく, $\{U_n\}$ は条件 (Z) を満たすとする。さら

に, u を E の点, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = \Pi_C(u)$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} H_n = \{z \in C\colon \phi(z, U_n x_n) \le \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C\colon \langle z - x_n, Ju - Jx_n \rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}(u) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F(u)$ に強収束する。

定理 2.5 ([4, Theorem 2.4]). E, C, $\{U_n\}$, F および u を定理 2.4 と同じとし, C の点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = \Pi_C(u)$, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_{n+1} = \{z \in C\colon \phi(z, U_n x_n) \le \phi(z, x_n)\} \cap C_n; \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}(u) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F(u)$ に強収束する。

3 Parallel hybrid 法

この節では, parallel hybrid 法 [2] による不動点近似定理を扱う。まず, ϕ に関して擬非拡大な写像の列に関する定理を, 次に, 有限個の relatively nonexpansive 写像に関する定理を紹介する。後者は, 前者を使って得られる結果であり, [2, Theorem 3.1] の一般化である。

以下, E を滑らか, 狭義凸, 回帰的な Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合, u を E の点, N を正の整数, $\Lambda = \{i \in \mathbb{N}\colon 1 \le i \le N\}$, $i \in \Lambda$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_{i,n}\colon C \to E$ を ϕ に関して擬非拡大な写像とする. さらに, F を $\{S_{i,n}\}_{(i,n)\in\Lambda\times\mathbb{N}}$ の共通不動点の集合, つまり, $F = \bigcap\{\mathrm{F}(S_{i,n})\colon (i,n) \in \Lambda \times \mathbb{N}\}$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = \Pi_C(u)$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n \in \arg\max\{\|S_{i,n}x_n - x_n\| : i \in \Lambda\}; \\ H_n = \{z \in C\colon \phi(z, S_{i_n,n}x_n) \le \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C\colon \langle z - x_n, Ju - Jx_n \rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}(u) \end{cases}$$

で定義する。次の補助定理より, $\{x_n\}$ が well-defined であることがわかる。

補助定理 3.1 ([4, Lemma 3.1]). F は空ではないと仮定する。このとき, 各 $H_n \cap W_n$ は空ではなく, 閉凸である。したがって, 点列 $\{x_n\}$ は well-defined である。

定理 2.4, 補助定理 2.1, 2.2 および 3.1 を使うと, 次の定理が得られる.

定理 3.2 ([4, Theorem 3.2]). E は一様凸であり, F は空ではなく, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\{S_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が条件 (Z) を満たすと仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F(x)$ に強収束する。

定理 3.2 と補助定理 2.3 より, 次の定理が得られる。

定理 3.3 ([4, Theorem 3.3]). E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合, N を正の整数, $\Lambda = \{i \in \mathbb{N}\colon 1 \le i \le N\}$, $\{\alpha_n^i\}$ を $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \Lambda$ を添字とする $[0,1)$ の 2 重数列, $\{T_1, \dots, T_N\}$ を C から E への relatively nonexpansive 写像の族, $K = \bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{F}(T_i)$, u を E の点とする。さらに, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\sup_n \alpha_n^i < 1$ であり, K は空ではないと仮定し, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = \Pi_C(u)$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n \in \arg\max\left\{\left\|J^{-1}\left[\alpha_n^i Jx_n + (1-\alpha_n^i)JT_i x_n\right] - x_n\right\| : i \in \Lambda\right\}; \\ y_n = J^{-1}\left[\alpha_n^{i_n} Jx_n + (1-\alpha_n^{i_n})JT_{i_n}x_n\right]; \\ H_n = \{z \in C\colon \phi(z, y_n) \le \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C\colon \langle z - x_n, Ju - Jx_n\rangle \le 0\}; \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n\cap W_n}(u) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_K(u)$ に強収束する.

定理 3.3 は, [2, Theorem 3.1] の一般化である。実際, [2, Theorem 3.1] では, 定理 3.3 の仮定に加えて, 各 T_i の連続性などが仮定されている。

4 Parallel shrinking 法

この節では, parallel shrinking 法による不動点近似定理を扱う。まず, ϕ に関して擬非拡大な写像の列に関する定理を紹介し, 次に, 有限個の relatively nonexpansive 写像の共通不動点に関する収束定理を示す。

以下, E, C, u, N, $S_{i,n}$, Λ および F を第 3 節の前半部分と同じとし, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = \Pi_C(u)$, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n \in \arg\max\{\|S_{i,n}x_n - x_n\| : i \in \Lambda\}; \\ C_{n+1} = \{z \in C\colon \phi(z, S_{i_n,n}x_n) \le \phi(z, x_n)\} \cap C_n; \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}(u) \end{cases}$$

で定義する。次の補助定理から, $\{x_n\}$ が well-defined であることがわかる。

補助定理 4.1 ([4, Lemma 4.1]). F は空ではないと仮定する。このとき, 各 C_n は空ではなく, 閉凸である。したがって, $\{x_n\}$ は well-defined である。

定理 2.5, 補助定理 2.1, 2.2 および 4.1 を使うと, $\{x_n\}$ の収束性が示せる。

定理 4.2 ([4, Theorem 4.2]). E は一様凸であり, F は空ではなく, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\{S_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が条件 (Z) を満たすと仮定する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_F(u)$ に強収束する。

定理 4.2 と補助定理 2.3 より, 次の定理が得られる。文献 [4] では証明を省略したので, ここに証明を書いておく。

定理 4.3 ([4, Theorem 4.3]). E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間, C を空でない E の閉凸部分集合, N を正の整数, $\Lambda = \{i \in \mathbb{N} \colon 1 \leq i \leq N\}$, $\{\alpha_n^i\}$ を $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \Lambda$ を添字とする $[0,1)$ の 2 重数列, $\{T_1, \ldots, T_N\}$ を C から E への relatively nonexpansive 写像の族, $K = \bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{F}(T_i)$, u を E の点とする。さらに, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\sup_n \alpha_n^i < 1$ であり, K は空ではないと仮定し, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = \Pi_C(u)$, $C_1 = C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n \in \arg\max\left\{\left\|J^{-1}\left[\alpha_n^i Jx_n + (1-\alpha_n^i)JT_i x_n\right] - x_n\right\| : i \in \Lambda\right\}; \\ y_n = J^{-1}\left[\alpha_n^{i_n} Jx_n + (1-\alpha_n^{i_n})JT_{i_n} x_n\right]; \\ C_{n+1} = \{z \in C \colon \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\} \cap C_n; \\ x_{n+1} = \Pi_{C_{n+1}}(u) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_K(x)$ に強収束する.

証明. 写像 $S_{i,n} \colon C \to E$ を $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \Lambda$ に対して

$$S_{i,n} = J^{-1}\left[\alpha_n^i J + (1-\alpha_n^i)JT_i\right]$$

で定義する。このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ および $i \in \Lambda$ に対して, $\mathrm{F}(S_{i,n}) = \mathrm{F}(T_i)$ が成り立つことがわかる。よって

$$\bigcap\{\mathrm{F}(S_{i,n}) \colon (i,n) \in \Lambda \times \mathbb{N}\} = \bigcap\{\mathrm{F}(T_i) \colon i \in \Lambda\} = K \neq \emptyset$$

である。補助定理 2.3 より, 各 $S_{i,n}$ は ϕ に関して擬非拡大であり, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\{S_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は条件 (Z) を満たすことがわかる。また, 定義より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$i_n \in \arg\max\{\|S_{i,n}x_n - x_n\| : i \in \Lambda\} \text{ および } y_n = S_{i_n,n}x_n$$

である。したがって, 定理 4.2 より結論が得られる。 □

5 [2, Theorem 4.1] の一般化

定理 3.2 を使うと, 次の定理が得られる。これは, [2, Theorem 4.1] の一般化である。

定理 5.1. E, C, N, $\{\alpha_n^i\}$, $\{T_1, \dots, T_N\}$, Λ, K および u を定理 3.3 と同じとし, E の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = u$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} i_n \in \arg\max \left\{ \left\| J^{-1} \left[\alpha_n^i J\Pi_C(x_n) + (1-\alpha_n^i) JT_i\Pi_C(x_n) \right] - x_n \right\| : i \in \Lambda \right\}; \\ y_n = J^{-1} \left[\alpha_n^{i_n} J\Pi_C(x_n) + (1-\alpha_n^{i_n}) JT_{i_n}\Pi_C(x_n) \right]; \\ H_n = \{ z \in E \colon \phi(z, y_n) \le \phi(z, x_n) \}; \\ W_n = \{ z \in E \colon \langle z - x_n, Ju - Jx_n \rangle \le 0 \}; \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}(u) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_K(u)$ に強収束する.

証明. 写像 $S_{i,n} \colon E \to E$ を, $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \Lambda$ に対して

$$S_{i,n} = J^{-1} \left[\alpha_n^i J\Pi_C + (1-\alpha_n^i) JT_i\Pi_C \right]$$

で定義する。[10, Example 3.1] より, Π_C は文献 [8] の意味で (sr) 型であるから, [8, Lemma 3.2] を使うと, 各 $i \in \Lambda$ に対して, $\mathrm{F}(T_i\Pi_C) = \mathrm{F}(T_i) \cap \mathrm{F}(\Pi_C) = \mathrm{F}(T_i)$ であり, $T_i\Pi_C$ は ϕ に関して擬非拡大であることがわかる。よって, $\alpha_n^i = 0$ のとき, $\mathrm{F}(S_{i,n}) = \mathrm{F}(T_i)$ である。また, $\alpha_n^i \neq 0$ のとき, [8, Lemma 3.5] より

$$\mathrm{F}(S_{i,n}) = \mathrm{F}(\Pi_C) \cap \mathrm{F}(T_i\Pi_C) = \mathrm{F}(T_i)$$

である。以上より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ および $i \in \Lambda$ に対して, $\mathrm{F}(S_{i,n}) = \mathrm{F}(T_i)$ である。 したがって

$$\bigcap \{ \mathrm{F}(S_{i,n}) \colon (i,n) \in \Lambda \times \mathbb{N} \} = \bigcap \{ \mathrm{F}(T_i) \colon i \in \Lambda \} = K \neq \emptyset$$

である。また, 補助定理 2.3 より, 各 $S_{i,n}$ は ϕ に関して擬非拡大であり, 各 $i \in \Lambda$ に対して $\{S_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ は条件 (Z) を満たすことがわかる。さらに, 定義より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$i_n \in \arg\max \{ \|S_{i,n}x_n - x_n\| : i \in \Lambda \} \quad \text{および} \quad y_n = S_{i_n,n}x_n$$

である。したがって, 定理 3.2 より結論が得られる。 □

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 15–50.

[2] P. K. Anh and C. V. Chung, *Parallel hybrid methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **35** (2014), 649–664.

[3] K. Aoyama, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III (ISBFS 2009), 2011, pp. 343–350.

[4] ———, *Parallel hybrid methods for relatively nonexpansive mappings*, Josai Mathematical Monographs **11** (2018), to appear.

[5] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.

[6] K. Aoyama, Y. Kimura, and F. Kohsaka, *Strong convergence theorems for strongly relatively nonexpansive sequences and applications*, J. Nonlinear Anal. Optim. **3** (2012), 67–77.

[7] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Strongly relatively nonexpansive sequences generated by firmly nonexpansive-like mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:95, 13.

[8] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, 2009, pp. 7–26.

[9] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[10] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[11] K. Aoyama and K. Zembayashi, *Strongly quasinonexpansive mappings, II* (2017), available at `arXiv:1703.02218[math.FA]`.

[12] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[13] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpan-*

sive operators with applications to feasibility and optimization, Optimization **37** (1996), 323–339.

[14] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[15] S.-y. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[16] ______, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[17] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[18] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, 1996, pp. 313–318.

[19] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000. Fixed point theory and its applications.

[20] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.